数值分析公式总结

目录

[一、数值计算误差 2](#_Toc154077296)

[1.1计算误差 2](#_Toc154077297)

[1.2函数的误差 2](#_Toc154077298)

[1.3数值运算的误差估计 2](#_Toc154077299)

[1.4误差限和有效位数的关系 3](#_Toc154077300)

[1.5相对误差限和有效位数的关系 3](#_Toc154077301)

[二、插值法 4](#_Toc154077302)

[2.1多项式插值 4](#_Toc154077303)

[2.2 Lagrange插值 4](#_Toc154077304)

[2.3 Newton插值 5](#_Toc154077305)

[2.4等距插值（差分形式的牛顿插值公式） 6](#_Toc154077306)

[三、曲线拟合的最小二乘法 7](#_Toc154077307)

[3.1曲线拟合 7](#_Toc154077308)

[3.2抛物线拟合 7](#_Toc154077309)

[四、数值积分 8](#_Toc154077310)

[4.1Newton-Cotes公式 8](#_Toc154077311)

[4.2科特斯系数表 8](#_Toc154077312)

[4.3复合求积公式 9](#_Toc154077313)

[五、数值微分 10](#_Toc154077314)

[5.1两点公式 10](#_Toc154077315)

[5.2三点公式 10](#_Toc154077316)

[六、非线性方程迭代法 11](#_Toc154077317)

[6.1二分法 11](#_Toc154077318)

[6.2不动点迭代法 11](#_Toc154077319)

[6.3牛顿迭代法 12](#_Toc154077320)

[6.4弦截法 12](#_Toc154077321)

[6.5抛物线法 12](#_Toc154077322)

[七、常微分方程初值问题数值解法 13](#_Toc154077323)

## 一、数值计算误差

### 1.1计算误差

误差：

相对误差： (分母也可以取x)

误差限：

相对误差限：

### 1.2函数的误差

误差：

误差限：

相对误差：

相对误差限：

### 1.3数值运算的误差估计

### 1.4误差限和有效位数的关系

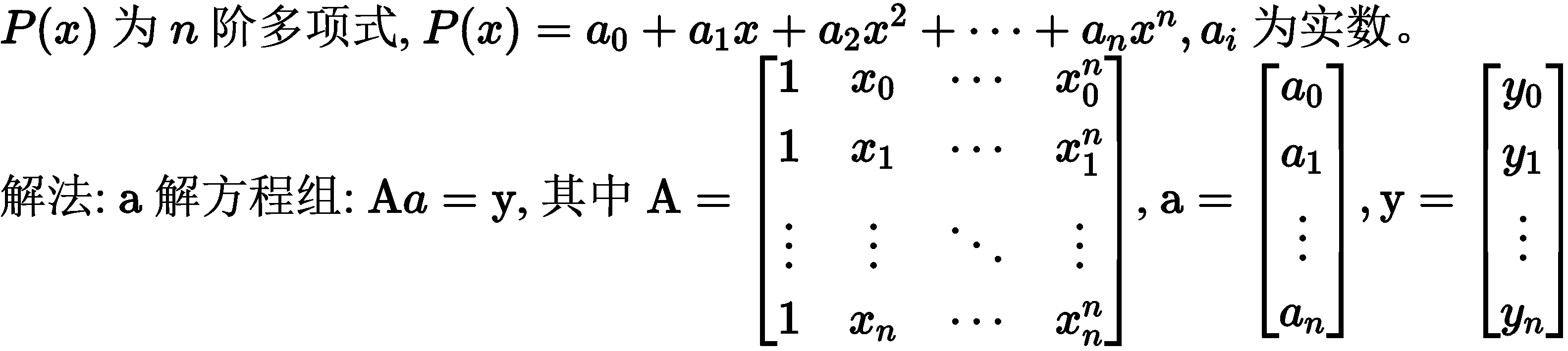
例：

### 1.5相对误差限和有效位数的关系

例：

## 二、插值法

### 2.1多项式插值



### 2.2 Lagrange插值

插值多项式：

插值余项：

截断误差：

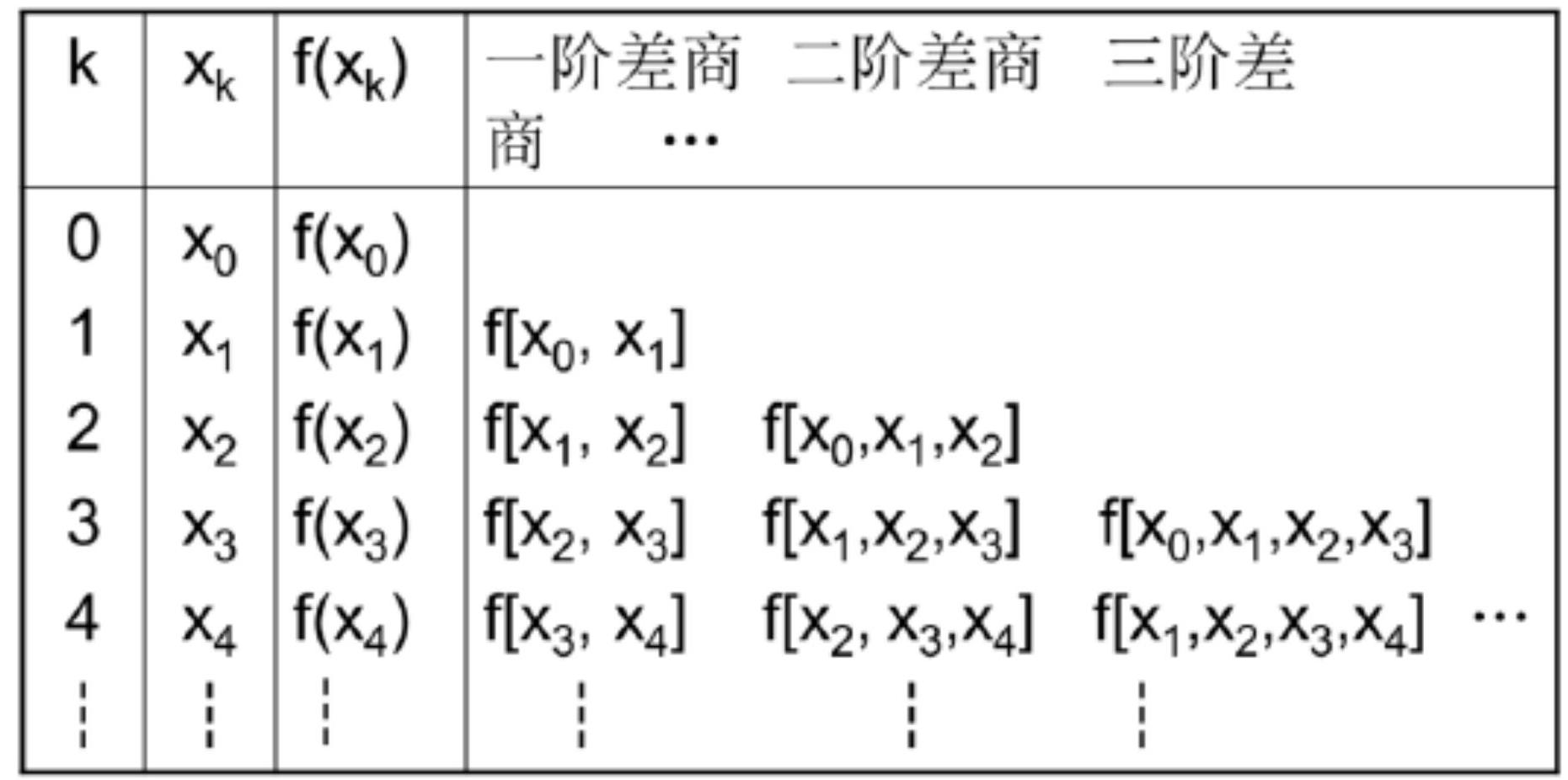
### 2.3 Newton插值

均差（差商）

一阶差商：

二阶差商：

K阶差商：

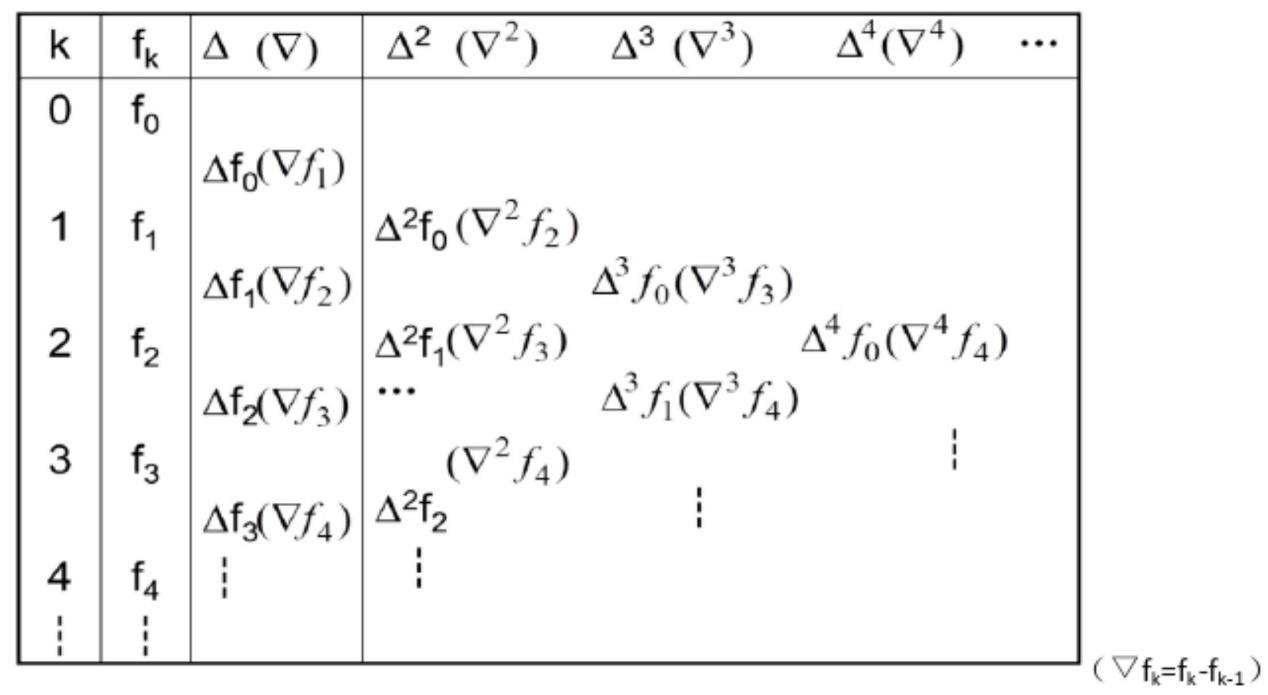


（均差表）

插值多项式：

插值余项：

### 2.4等距插值（差分形式的牛顿插值公式）



（差分表）

差分多项式：

前插余项：

截断误差：

## 三、曲线拟合的最小二乘法

### 3.1曲线拟合

对一组(xi,yi)用次数m<<n的多项式拟合时的误差：

### 3.2线性拟合

（注：n为节点个数，a1为系数k，a0为常数b）

## 四、数值积分

### 4.1Newton-Cotes公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 公式 | 余项 |
| 中矩形公式 |  |  |
| Cotes公式 | 是全系数，是科特斯系数，右侧为代数精度 | 这里的n为等分数 |
| 梯形公式(1次代数精度) |  |  |
| 辛普森公式(3次代数精度) |  |  |

### 牛顿柯特斯公式及复合形式、龙贝格求积公式，高斯勒让德求积公式-CFANZ编程社区4.2科特斯系数表

### 4.3复合求积公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 公式 | 余项 |
| 复合梯形公式 |  |  |
| 将区间[a,b]n等分，步长h=，分点 | | |
| 复合辛普森公式 |  |  |
| 将区间[a,b]n等分，在每个子区间[]上采用Simpson公式，记= | | |
| \*Gauss公式 |  | |
| 选择互异节点使插值求积公式代数精度为2n+1，则该求积公式为高斯型，这些节点为高斯节点  与任意次数不大于n的多项式P(x)（带权）正交 | | |

## 五、数值微分

### 5.1两点公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 公式 | 余项 |
| 前点公式 |  |  |
| 中点公式 |  |  |
| 后点公式 |  |  |

### 5.2三点公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 公式 | 余项 |
| 前点公式 |  |  |
| 中点公式 |  |  |
| 后点公式 |  |  |

## 六、非线性方程迭代法

### 6.1二分法

迭代次数：

例：求在[1,1.5]的一个实根精度要求小数点后两位

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| K |  |  |  | 符号 |
| 1 | 1 | 1.5 | 1.25 |  |
| 2 | 1.25 | 1.5 | 1.375 | + |
| ……… | | | | |
| 6 | 1.3125 | 1.3281 | 1.3203 | + |

### 6.2不动点迭代法

(收敛速度慢)

迭代次数：

 局部收敛:, 不动点, 在某领域连续, 且<1, 则局部收敛。

### 6.3牛顿迭代法

\*(为了防止迭代发散，迭代过程有的单调性为牛顿下山法)

牛顿法

### 6.4弦截法

将牛顿法中的用 代替

### 6.5抛物线法

讨论正负号取舍问题：在,,三个近似根中，自然假定 更接近根，为了保证精度，取，为此只需要取根式前的符号与相同

## 七、常微分方程初值问题数值解法

定义一：为显式单步法的局部截断误差

定义二：局部截断误差满足

则称方法具有p阶精度；若展开写成，则为局部截断误差主项

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 公式 | 局部截断误差 |
| 前进Euler法（显式） | 一阶精度 | 局部截断误差是 |
| 后退Euler法（隐式） | 一阶精度 | 局部截断误差是 |
| 两步欧拉法 | 二阶精度 | 局部截断误差是 |
| 梯形法 | 二阶精度  梯形公式是将欧拉公式与隐式欧拉公式的算术平均，也是隐式公式 | 局部截断误差主项为 |
| 改进欧拉公式 |  |  |

例：用改进欧拉法求初值问题

取h=0.1，n=0，1，…，9

n=0时

逐步迭代到n=9